Université Paris-Diderot  Année 2013-2014
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

# Devoir surveillé 1

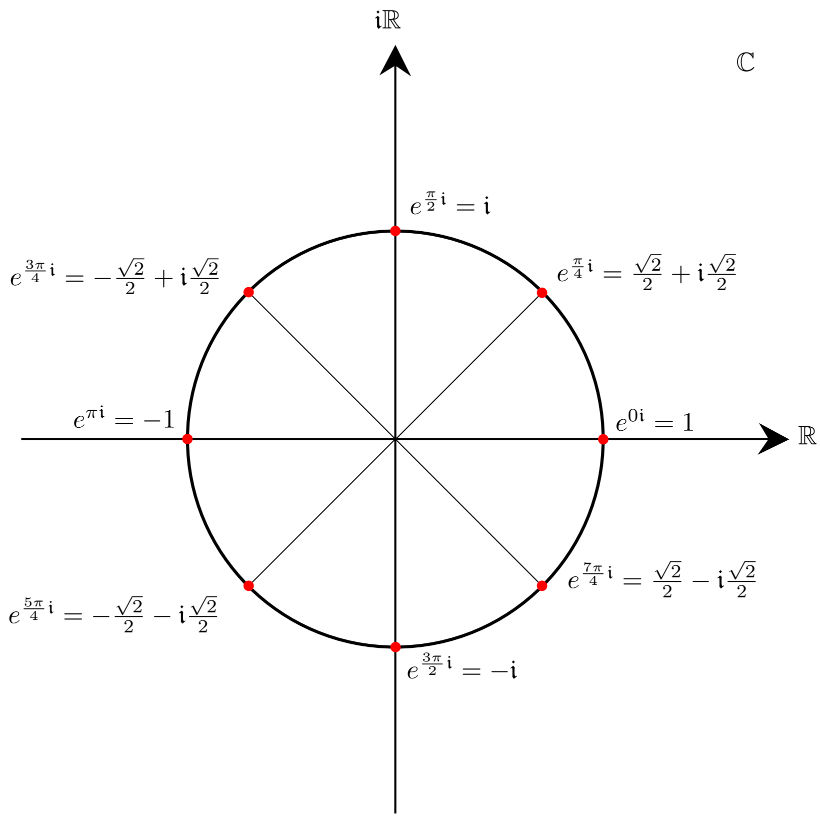
**Exercice 1.** 1. Les solutions de $z^8 = 1$ sont données par

$$z = e^{\mathrm{i}2k\pi/8} = e^{\mathrm{i}k\pi/4}, \qquad k = 0, \ldots, 7.$$

En notation cartésienne, on obtient

$$z = \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right), \qquad k = 0, \ldots, 7.$$

2. Les racines huitièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à 8 côtés, sont contenues dans la cercle de rayon 1, et l'une de ces racines est 1 :



3. Rappelons qu'une racine $n$-ème $\eta$ de l'unité est dite primitive si pour tout $0 \leq m < n$ on a $\eta^m \neq 1$. On en déduit que les racines primitives huitièmes de l'unité sont : $e^{\mathrm{i}\pi/4}$, $e^{\mathrm{i}3\pi/4}$, $e^{\mathrm{i}5\pi/4}$ et $e^{\mathrm{i}7\pi/4}$.
4. Rappelons que si $w \in \mathbb{C}$ désigne un nombre complexe, et $z_1, \ldots, z_n$ ses racines $n$-èmes. Alors on a
$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^{n+1}w, \qquad \sum_{k=1}^{n} z_k = 0. \tag{1}$$
Par suite $1+\eta+\eta^2+\eta^3+\eta^4+\eta^5+\eta^6+\eta^7 = 0$, *i.e.* $\eta+\eta^2+\eta^3+\eta^4+\eta^5+\eta^6+\eta^7 = -1$.

**Exercice 2.** Remarquons que l'équation suivante
$$(1+\mathrm{i})z^2 - 4z + 3 = 9\mathrm{i}.$$
est équivalente à
$$(1+\mathrm{i})\big(z^2 - 2(1-\mathrm{i})z - (3+6\mathrm{i})\big) = 0.$$
On est donc ramené à résoudre $z^2 - 2(1-\mathrm{i})z - (3+6\mathrm{i}) = 0$. Le discriminant de cette équation est
$$\Delta = \big(-2(1-\mathrm{i})\big)^2 - 4\big(-(3+6\mathrm{i})\big) = 4(3+4\mathrm{i}).$$
Déterminons les racines carrées de $(3+4\mathrm{i})$, *i.e.* les nombres complexes $w$ tels que $w^2 = 3+4\mathrm{i}$. Écrivons $w$ sous la forme $u+\mathrm{i}v$ ; alors $w^2 = 3+4\mathrm{i}$ se réecrit $u^2 - v^2 = 3$ et $2uv = 4$. Par ailleurs $|w^2| = |3+4\mathrm{i}|$, soit $u^2+v^2 = 5$. On en déduit que $u^2 = 4$, $v^2 = 1$ et $2uv = 4$ ; autrement dit $2+\mathrm{i}$ et $-2-\mathrm{i}$ sont les racines carrées de $3+4\mathrm{i}$. Finalement les solutions de $z^2 - 2(1-\mathrm{i})z - (3+6\mathrm{i}) = 0$ sont données par 3 et $-1-2\mathrm{i}$.

**Exercice 3.** 1. Pour tout $n$ entier positif on a
$$\overline{\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n-1}}\right)} = \frac{\overline{(1+\mathrm{i})^n}}{\overline{(1-\mathrm{i})^{n-1}}} = \frac{(\overline{1+\mathrm{i}})^n}{(\overline{1-\mathrm{i}})^{n-1}} = \frac{(1-\mathrm{i})^n}{(1+\mathrm{i})^{n-1}}$$
Autrement dit $\frac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n-1}}$ et $\frac{(1-\mathrm{i})^n}{(1+\mathrm{i})^{n-1}}$ sont conjugués.

2. Calculons $\frac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2} + \frac{(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^2}$ :
$$\begin{aligned}
\frac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2} + \frac{(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^2} &= \frac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2} + \overline{\frac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2}} \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2}\right) \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\,\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2})^3}{(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2})^2}\right) \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\,\frac{(e^{\mathrm{i}\pi/4})^3}{(e^{-\mathrm{i}\pi/4})^2}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{3\mathrm{i}\pi/4+2\mathrm{i}\pi/4}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{5\mathrm{i}\pi/4}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{-3\mathrm{i}\pi/4}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= -2
\end{aligned}$$